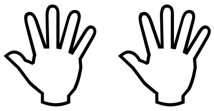
Paul Koop:

Alles was zählt: Das kleine Lesebuch vom Rechnen für die Berufsvorbereitung

Inhaltsverzeichnis:

Das Dezimalsystem

An jeder Hand hast Du fünf Finger. Das sind zusammen zehn Finger. Das siehst Du sofort, wenn Du die zehn Finger vor Dich hältst:



Diese Zahlendarstellung nennt man „Zaunsystem,“ weil Du so jede Zahl durch einen weitern Strich darstellen kannst. Die Zahl Zehn kannst Du so noch gut darstellen:

IIIIIIIIII

Aber schon die Zahl Einhundert wird schwer lesbar:

IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII

Abhilfe würde es schaffen, wenn Du jeweils zehn Striche zusammenfasst:

IIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII

Noch einfacher wäre es, wenn Du für zehn kleine Striche einen dicken ■ Strich und für zehn dicke Striche einen noch dickeren □ Strich machen könntest:

□□□ ■ IIIII ständе dann für die Zahl 315:

Im Zaunsystem wäre das:

IIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII
IIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII
IIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII IIIIIIIIII
IIIIIIIII IIIII

Wie Du siehst, steht III * □ + I * ■ + IIIII*I für die Zahl 3*100+1*10+5*1:

Jetzt weißt Du, was das Dezimalsystem ist. Das Dezimalsystem ist ein Zahlensystem, das zehn Zeichen zu einem Zehner, zehn Zehner zu einem Hunderter und zehn Hunderter zu einem Tausender zusammenfasst.

Immer wenn zehn Pakete voll sind, musst du ein neues größeres Paket aufmachen, in das wieder zehn kleinere Pakete passen.

Das Zählen

Immer, wenn Du nun eine bestimmte Anzahl von Elementen hast (zum Beispiel Brillen) kannst Du diese Elemente zählen, indem Du jedem Element fortlaufend eine Zahl zuordnest:

👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓	5
	35

Das sind also zusammen fünfunddreißig Brillen. Das ist doch ganz einfach.

Jetzt musst Du nur noch lernen, die richtigen Zehnerpakete zusammenzufassen.

👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓👓👓👓👓👓	10
👓👓👓👓👓	5
👓👓👓👓👓👓	6
	41

Das sind Einundvierzig Brillen. Jetzt zeige ich Dir, wie Du das rechnest:

	1	0
	1	0
	1	0
		5
		6
+	1	
	4	1

Du zählst zuerst die Fünf und die Sechs in der ersten Spalte zusammen. Dazu zählst Du von der Fünf sechs Schritte weiter: Sechs, Sieben, Acht, Neun, Zehn, Elf. Das ist die Zahl Elf, also ein Zehnerpaket und ein Einer. Das neue Zehnerpaket schreibst Du unter die drei anderen Zehnerpakete. Das eine Einerpaket schreibst Du unter die Fünf und die Sechs. Nun zählst Du die Zehnerpakete zusammen. Es sind vier Zehnerpakete. Es sind also einundvierzig Brillen. Das sind also im Dezimalsystem 41 Brillen.

Das Zusammenzählen und Abziehen natürlicher Zahlen

Die Zahlen, mit denen Du zuerst arbeitest werden natürliche Zahlen genannt. Es sind die Zahlen, die Du bisher kennengelernt hast. Das Zusammenzählen nennt man auch Addition. Die Zahlen, die Du addierst oder zusammenzählst werden Summanden genannt. Das Ergebnis einer Addition wird Summe genannt. Du darfst die Summanden immer vertauschen. Dieses Gesetz wird Kommutativgesetz genannt. Das Abziehen nennt man auch Subtrahieren. Die Zahl, von der eine andere Zahl Abgezogen wird, wird auch Minuend genannt. Die Zahl, die Du abziehst oder subtrahierst wird auch Subtrahend genannt. Subtrahend und Minuend dürfen nicht vertauscht werden. Der Subtrahend muss kleiner oder maximal gleich dem Minuend sein.

Das Addieren natürlicher Zahlen

Die Zahlen, mit denen Du zuerst arbeitest werden natürliche Zahlen genannt. Es sind die Zahlen, die Du bisher kennen gelernt hast.

Einfach ist es natürliche Zahlen zu addieren, wenn die Zehnerpakete in den Spalten jeweils nicht mehr als neun Pakete enthalten. Dann schreibst Du die Anzahl der Pakete jeweils in ihre Spalte:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		2	0	0
			5	0
+				
		2	5	0

Du kannst auch schreiben 200 + 50 = 250. Das Zeichen „+“ wird Operator genannt und „bedeutet“, dass die beiden Zahlen addiert werden sollen. Das Zeichen „=“ wird auch Vergleichsoperator genannt und „bedeutet“, dass die Ausdrücke Links und Rechts vom Zeichen gleich sind. Diese Aussage kann wahr oder falsch sein.

Schwieriger ist es natürliche Zahlen zu addieren, wenn die Zehnerpakete in den Spalten jeweils mehr als neun Pakete enthalten. Dann schreibst Du die Anzahl der vollen Pakete jeweils in die nächste Spalte und die Anzahl in dem nicht vollen Paket in seine Spalte. Die zusätzlichen vollen Pakete der nächsten Spalte zählst Du mit den Paketen dieser Spalte zusammen:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		2	0	2
			5	9
+			1	
		2	6	1

Du kannst auch 202 + 59 = 261 schreiben.

Das Subtrahieren natürlicher Zahlen

Einfach ist es diese Zahlen zu subtrahieren, wenn die Zehnerpakete der Subtrahenden in den Spalten jeweils nicht mehr als neun Pakete enthalten und ihre Anzahl kleiner ist als die Anzahl der Pakete des Minuenden. Dann schreibst Du die Anzahl der übrigen Pakete jeweils in ihre Spalte:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		2	9	9
			5	0
-				
		2	4	9

Du kannst auch 299 – 50 = 249 schreiben.

Subtrahierst Du vom Minuenden jeweils mehr als einen Subtrahenden, so musst Du die Subtrahenden im Kopf Spalte für Spalte addieren und dann vom Minuenden subtrahieren:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		2	9	9
			2	5
			2	5
-			1	
		2	4	9

Du kannst auch 299 – 25 – 25 = 249 schreiben. Wenn Du erst alle Subtrahenden zusammenfassen willst, dann schreibst Du 299 – (25 + 25).

☝ *Beachte, dass Du, wenn Du eine sogenannte Minusklammer setzt oder öffnest, die Zeichen in der Klammer umkehren musst.*

Schwieriger ist es diese Zahlen zu subtrahieren, wenn die Zehnerpakete der Subtrahenden in den Spalten jeweils mehr zählen, als die Zehnerpakete des Minuenden. Dann schreibst Du die Anzahl der vollen Pakete jeweils in die nächste Spalte und die Anzahl in dem nicht vollen Paket in seine Spalte. Die zusätzlichen vollen Pakete der nächsten Spalte zählst Du mit den Paketen dieser Spalte zusammen:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
		2	5	5
			2	9
			2	9
			2	9
-		1	3	
		1	6	8

Du kannst auch 255 – 29 – 29 – 29 = 168 oder 255 – (29 + 29 + 29) =168 schreiben.

Das Malnehmen und Teilen natürlicher Zahlen

Das Malnehmen oder die Multiplikation ist eine abgekürzte Schreibweise für die mehrmalige Addition einer Zahl mit sich selbst. Eine natürliche Zahl multiplizierst Du, indem Du jede einzelne Zahl so oft mit sich selbst addierst, wie sie multipliziert werden soll. Die Zahlen, die multipliziert werden, können beliebig vertauscht werden. Das Ergebnis einer Multiplikation wird Produkt genannt. Die Zahlen, die multipliziert werden, werden Faktoren genannt.

$5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 * 2 = 2 * 5 = 5 + 5 = 10.$

Das Dividieren oder Teilen einer Zahl ist die Umkehrung der Multiplikation. Wenn Du eine natürliche Zahl durch eine andere natürliche Zahl teilst, dann stellst du fest, wie oft Du diese Zahl mit sich selbst addieren musst, damit Du die zu teilende Zahl erhältst. Die Zu teilende Zahl wird Dividend genannt. Die Zahl, durch die geteilt wird, wird Divisor genannt. Das Ergebnis einer Division wird Quotient genannt. Dividend und Divisor können nicht vertauscht werden.

4 : 2 = 2 aber 2 : 4 hat keine natürliche Zahl als Ergebnis.

Beachte, dass es natürliche Zahlen gibt, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind. Weil diese Zahlen ganz besondere Zahlen vor allen andern Zahlen sind und jede andere natürliche Zahl als Produkt aus ihnen gebildet werden kann, nennt man diese Zahlen erste (prim) Zahlen also Primzahlen. Die ersten Primzahlen lauten: 1, 2, 3, 5, 7, 11, …

Das Kleine Einmaleins

Wenn Du die Zahlen nicht untereinander schreiben willst um sie zu addieren, kannst du eine schriftliche Multiplikation durchführen. Die mehrfache Addition der Zahlen des ersten Zehnerpaketes solltest Du aber in Reihen und Spalten aufschreiben und auswendig lernen. Dieses „Kleine Einmaleins“ ist auch für die Multiplikation auch größerer Zahlen nützlich:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vier mal Neun ist gleich sechsunddreißig: 4 * 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36.

Das Multiplizieren einer natürlichen Zahl

Wenn Du eine natürliche Zahl mit einer natürlichen Zahl multiplizierst, dann multiplizierst Du Stelle für Stelle jedes Zehnerpaket mit dieser Zahl. Die überzähligen Zehnerpakete schreibst Du in die Spalte der nächsten Zehnerpakte. Dann addierst Du die Spalten wie gewohnt:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	*	Einer
		4	4	4	*	9
		6	6	6		
	3	3	3			
+						
	3	9	9	6		

Du kannst auch schreiben 444 * 9 = 3996

Wenn Du eine natürliche Zahl mit einer natürlichen Zahl multiplizierst, die aus mehr als einer Stelle besteht, dann multiplizierst Du Stelle für Stelle und Ziffer für Ziffer jedes Zehnerpaket mit den Ziffern dieser Zahl. Die überzähligen Zehnerpakete schreibst Du in die Spalte der nächsten Zehnerpakte. Dann addierst Du die Spalten wie gewohnt:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	*	Zehner	Einer
		4	4	4	*	9	9
		6	6	6			
	3	3	3				
			6	6	6		
		3	3	3			
+							
	1	1	1				
	4	3	9	5	6		

Du kannst auch schreiben 444 * 99 = 43956

Das Dividieren einer natürlichen Zahl

Wenn Du eine natürliche Zahl durch eine natürliche Zahl dividierst, dann dividierst Du Stelle für Stelle jedes Zehnerpaket mit dieser Zahl.

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	:	Einer	=				
		2	5	0	:	5	=	0	5	0	
		0									
		2	5								
		2	5								
		0	0	0							
		0	0	0							
		0	0	0							

Führende Nullen kannst Du auch weglassen und sofort eine Stelle weitergehen. Du kannst auch schreiben 250 : 5 = 50

Bruchrechnung

Die Division ganzer Zahlen kann auch als Bruch dargestellt werden. Brüche drücken also ein Verhältnis oder einen Anteil aus. Brüche werden durch Übereinanderschreiben von Zähler und Nenner dargestellt. Zwischen Zähler und Nenner steht der Bruchstrich. Der Zähler steht für den Dividend der Nenner für den Divisor.

$$\frac{5}{8}\frac{\leftarrow Z\ddot{a}hler}{\leftarrow Nenner}$$

Der Bruch mit dem Zähler 5 und dem Nenner 8 bedeutet „fünf Achtel“. Das sind fünf Teile eines in acht Teile zerlegten Ganzen. Haben Zähler und Nenner einen gemeinsamen ganzzahligen Teiler, so können sie gekürzt werden. Den größten gemeinsamen Teiler bestimmt man durch Primfaktorzerlegung.

	2	3	5	7
6	x	x		
14	x			x

$$\frac{6}{14}=\frac{2*3}{2*7}=\frac{3}{7}$$

Der größte gemeinsame Teiler ist das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren. Sechs und vierzehn haben als gemeinsamen Primfaktor die zwei. Der Bruch kann also durch zwei gekürzt werden.. Ein Bruch wird gekürzt, indem Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert werden.

$$\frac{6}{14}=\frac{6:2}{14:2}=\frac{3}{7}$$

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt aus Primzahlen darstellen. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und durch eins teilbar ist. Es ist hilfreich, wenn Du Dir ein eine Primzahltabelle anlegst, in der Du in den Spalten die ersten Primzahlen und in den Zeilen die ersten natürlichen Zahlen auflistest. In die Zellen schreibst Du dann, wie oft die jeweilige Primzahl als Faktor in der Primzahlzerlegung der jeweiligen Zahl vorkommt:

	2	3	5	7	11	13
2	1					
3		1				
4	2					
5			1			
6	1	1				
7				1		
8	3					
9		2				
10	1		1			
11					1	
12	2	1				
13						1
14	1			1		

Die Primfaktorzerlegung kannst Du zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers beim Kürzen und zur Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen beim Erweitern benützen. Wie Du den größten gemeinsamen Teiler bestimmst hast Du ja schon gesehen. Du bildest das Produkt aller gemeinsamen Primfaktoren von Zähler und Nenner:

$$\frac{4}{8} = \frac{2*2}{2*2*2} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{4}$$

Wenn Du mit Brüchen rechnen willst, so ist es hilfreich für Dich, wenn Du einige Unterscheidungen kennst:

Stammbruch	$\frac{1}{4}$	Ein Stammbruch ist ein Bruch mit dem Zähler eins.
echter Bruch	$\frac{3}{4}$	Ein echter Bruch ist ein Bruch mit einem Zähler größer als eins und kleiner als der Nenner.
Scheinbruch	$\frac{8}{4}=2$	Ein Scheinbruch ist ein Bruch dessen Zähler ein Vielfaches des Nenner ist.
unechter Bruch	$\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$	Ein unechter Bruch ist ein Bruch dessen Zähler größer ist als der Nenner und dessen Zähler kein Vielfaches des Nenner ist.
gemischter Bruch	$1\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$	Ein gemischter Bruch ist eine ganze Zahl zusammengezählt mit einem echten Bruch.

Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem Du den Zähler mit dem Zähler multiplizierst und den Nenner mit dem Nenner multiplizierst.

$$\frac{2}{4}*\frac{3}{5}=\frac{2*3}{4*5}=\frac{6}{20}$$

So stimmt die Rechnung. Du solltest aber immer vor dem Rechnen und nach dem Rechnen schauen, ob Du kürzen kannst.

$$\frac{2}{4}*\frac{3}{5}=\frac{1}{2}*\frac{3}{5}=\frac{1*3}{2*5}=\frac{3}{10}$$

oder

$$\frac{2}{4}*\frac{3}{5}=\frac{2*3}{4*5}=\frac{6}{20}=\frac{3*2}{10*2}=\frac{3}{10}$$

Division von Brüchen

Du dividierst zwei Brüche miteinander, indem Du den einen Bruch mit dem so genannten Kehrbruch des anderen Bruches multiplizierst. Es ist am besten, wenn Du Dir das an einem Beispiel anschaust.

$$\frac{2}{4} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} * \frac{5}{3} = \frac{1 * 5}{2 * 3} = \frac{5}{6}$$

Addition von Brüchen

Zwei Brüche können nur miteinander addiert werden, wenn ihr Nenner gleich ist. Dann addierst Du diese beiden Brüche, indem Du die Zähler addierst.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Sind die Nenner der zu addierenden Brüche nicht gleich, so müssen die Brüche in geeigneter Weise erweitert werden, um ihre Nenner gleichnamig zu machen. Ideal ist eine Erweiterung bis zum gemeinsamen kleinstmöglichen Vielfachen der Nenner.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1*3}{2*3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt aus Primzahlen darstellen. Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl, die nur durch sich selbst und durch eins teilbar ist. Es ist hilfreich, wenn Du Dir ein eine Primzahltabelle anlegst, in der Du in den Spalten die ersten Primzahlen und in den Zeilen die ersten natürlichen Zahlen auflistest. In die Zellen schreibst Du dann, wie oft die jeweilige Primzahl als Faktor in der Primzahlzerlegung der jeweiligen Zahl vorkommt:

	2	3	5	7	11
2	1				
3		1			
4	2				
5			1		
6	1	1			
7				1	
8	3				
9		2			
10	1		1		
11					1
12	2	1			
13					
14	1			1	

Die Primfaktorzerlegung kannst Du zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers beim Kürzen und zur Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen beim Erweitern benützen.

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2*2*2}+\frac{1}{2*3}=\frac{1*3}{2*2*2*3}+\frac{1*2*2}{2*2*2*3}=\frac{3}{24}+\frac{4}{24}=\frac{7}{24}$$

Die Subtraktion von Brüchen

Für die Subtraktion von Brüchen gelten dieselben Regeln wie für die Addition. Haben die beiden Brüche gleichnamige Nenner, so subtrahierst Du die beiden Zähler voneinander.

$$\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

Haben die beiden Brüche ungleichnamige Nenner, so musst Du die Brüche vor der Subtraktion erst gleichnamig machen.

$$\frac{8}{9}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}-\frac{1*3}{3*3}=\frac{8}{9}-\frac{3}{9}=\frac{5}{9}$$

Natürliche Zahlen, ganze Zahlen und rationale Zahlen

Die Bruchzahlen erweitern die Menge der natürlichen Zahlen zur Menge der rationalen Zahlen. Deshalb ist es an dieser Stelle sinnvoll, über diese Zahlenmengen zu sprechen.

Der Mengenbegriff ist ein moderner Begriff. Mengen sind Gesamtheiten unterscheidbarer Elemente, die zu einer Gesamtheit zusammengefasst werden. Der Zahlbegriff (so wie er heute gebraucht wird) setzt den Mengenbegriff bereits voraus.

Die Menge der natürlichen Zahlen kennst Du ja schon.

$$N := \{0,1,2,3,4...\}$$

In der Menge der natürlichen Zahlen hast Du nicht jede Subtraktion durchführen können. Wenn Du von Drei die Vier subtrahieren willst, so gibt es für diese Berechnung kein Element der natürlichen Zahlen, das als Ergebnis für diese Berechnung in Frage kommt. Dieses Problem löst die Menge der ganzen Zahlen.

$$Z := \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4...\}$$

Jetzt gibt es eine Lösung für die Berechnung Drei minus Vier ist nun gleich minus Eins. Du kannst auch schreiben 3 – 4 = -1.

In der Menge der ganzen Zahlen gibt es keine „gebrochenen“ Zahlen zum Beispiel zwischen Null und Eins. Diese Zahlen werden durch die Brüche zur Menge der ganzen Zahlen hinzugefügt. Diese Menge ist die Menge der rationalen Zahlen.

$$Q := \begin{Bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{...} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{...} \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{...} \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{...} \end{Bmatrix}$$

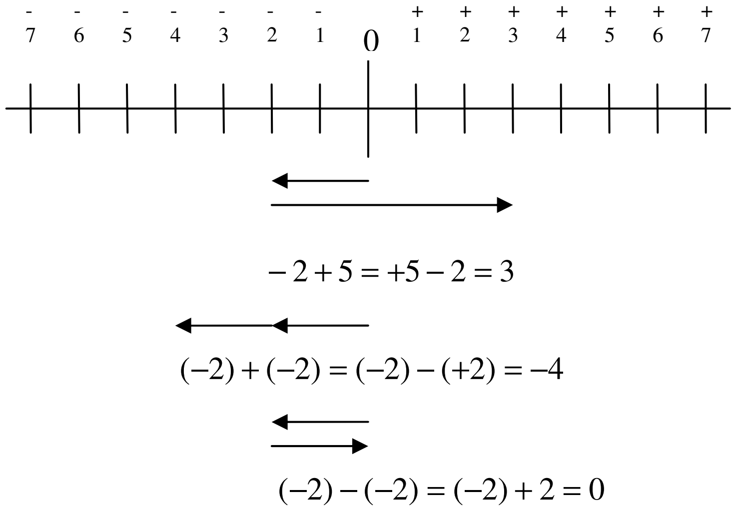
Es gibt auch noch eine weitere Schreibweise für rationale Zahlen.

$$\frac{3}{4} = 3:4 = 0{,}75$$

Das Rechnen mit ganzen Zahlen

Das Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen

An das Zusammenzählen und Abziehen von Zahlen aus der Menge der ganzen Zahlen musst Du Dich erst gewöhnen. Als allgemeine Regel gilt: Ein negatives Vorzeichen darfst Du niemals weglassen. Ein positives Vorzeichen kannst Du auch weglassen. Eine Zahl ohne Vorzeichen ist eine positive Zahl. Eine Zahl mit negativem Vorzeichen ist kleiner als eine Zahl mit positivem Vorzeichen. Von zwei Zahlen mit positivem Vorzeichen ist die Zahl die größere, deren Betrag größer ist. Und von zwei Zahlen mit negativem Vorzeichen ist die Zahl die kleinere, deren Betrag größer ist.



$$-2+5=+5-2=3$$

$$(-2)+(-2)=(-2)-(+2)=-4$$

$$(-2)-(-2)=(-2)+2=0$$

Das Multiplizieren und Dividieren ganzer Zahlen

Das Multiplizieren und Dividieren ganzer Zahlen ist noch viel gewöhnungsbedürftiger als das Addieren und Subtrahieren. Als allgemeine Regel kannst Du dir merken, dass die Multiplikation oder Division mit (-1) das Vorzeichen umkehrt.

$$(2)*(1)=(2)$$

$$(2)*(-1)=(-2)$$

$$(-2)*(-1)=(2)$$

$$((-2)*(-1))*(-1)=2$$

$$(-2)*(-2)=(-1)*((-1)*((2)*(2)))=4$$

Das Rechnen mit rationalen Zahlen

✐ *Jeder Bruch steht für eine Division.*

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5$$

Das kannst Du selbst ausrechnen:

Einer		*Einer*		*Einer*		*zehntel*	*hunderstel*	*tausendstel*
1	*:*	*2*	*=*	*0*	*,*	*5*	*0*	*0*
0								
1	*0*							
1	*0*							
0	*0*							

Rationale Zahlen sind ausgerechnete Bruchzahlen.

$$\frac{1}{1} = 1{,}0$$

$$\frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{1000} = 0{,}001$$

$$\frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

Das Addieren und Subtrahieren rationaler Zahlen

Mit rationalen Zahlen rechnest Du genauso wie mit natürlichen Zahlen und ganzen Zahlen. Es kommen nur zu den Tausendern, Hunderter, Zehnern und Einern zehntel, hundertstel und tausendsten hinter dem Komma dazu:

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer		zehntel	hunderstel	tausendstel
		2	0	2	,	1	0	0
			5	9	,	0	1	0
+			1		,			
		2	6	1	,	1	1	

Das Multiplizieren und Dividieren rationaler Zahlen

Jede Multiplikation rationaler Zahlen kannst Du als Multiplikation rationaler Zahlen kannst Du so umformen:

$$4{,}4 * 9{,}9 = 44 * 99 * 0{,}10 * 0{,}10 = \frac{\left(\frac{44 * 99}{10}\right)}{10} = 44 * 99 * \frac{1}{10} * \frac{1}{10}$$

Beispiel 1

	Hunderter	Zehner	Einer	zehntel	*	Zehner	Einer
		4	4,	4	*	9	9
		6	6	6			
	3	3	3				
			6	6	6		
		3	3	3			
+							
	1	1	1				
	4	3	9	5,	6		

Beispiel 2

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	*	Einer	zehntel
		4	4	4	*	9,	9
		6	6	6			
	3	3	3				
			6	6	6		
		3	3	3			
+							
	1	1	1				
	4	3	9	5,	6		

Beispiel 3

	Hunderter	Zehner	Einer	zehntel	*	Einer	zehntel
		4	4,	4	*	9,	9
		6	6	6			
	3	3	3				
			6	6	6		
		3	3	3			
+							
	1	1	1				
	4	3	9,	5	6		

Wenn Du eine rationale Zahl durch eine Zahl dividierst, dann dividierst Du Stelle für Stelle jedes Zehnerpaket mit dieser Zahl.

		Einer	zehntel	hundertstel	:	Einer	=	Einer	zehntel	hundertstel	
		2,	5	0	:	5	=	0,	5	0	
		0									
		2	5								
		2	5								
		0	0	0							
		0	0	0							
		0	0	0							

Du kannst auch schreiben 2,50 : 5 = 0,50. Wenn Dividend und Divisor beide Nachkommastellen haben, so erweiterst Du beide Zahlen solange mit zehn, bis der Divisor keine Nachkommastellen mehr hat. Aus 1234,567 : 123,45 wird dann 123456,7 : 12345.

Klammerrechnen

2 plus 2 ist gleich 4 und 2 mal 2 ist auch gleich 4. Aber wie viel ist 2 mal 2 plus 2? Musst Du nun zuerst 2 mit 2 multiplizieren oder erst 2 mit 2 zusammenzählen und dann mit 2 multiplizieren:

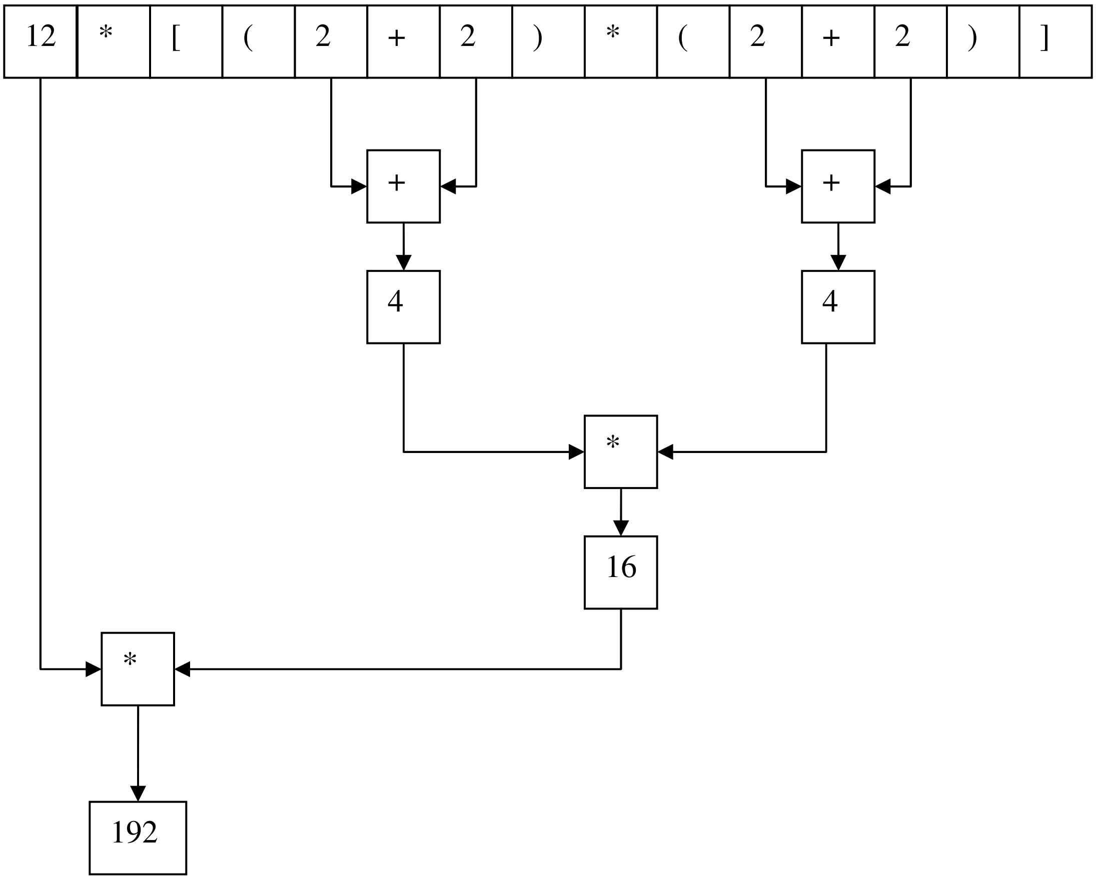
$$2 * 2 + 2 = 6$$

Wenn Multiplikation oder Division und Addition oder Subtraktion in einer Rechnung gemeinsam vorkommen, dann ist die Multiplikation oder Division immer vor der Addition oder Subtraktion durchzuführen. Soll von dieser Regel abgewichen werden, so musst Du Klammern benutzen:

$$2 * (2 + 2) = 8$$

Wenn so eine Berechnung länger wird, dann musst Du vorsichtig und konzentriert rechnen. Es gibt dazu verschiedene Möglichkeiten.

So kannst Du in einem Rechenbaum von der ersten bis zur letzten Berechnung voranschreiten. Das ist sehr übersichtlich und Du benötigst viel Platz:



Du kannst nach ein wenig Übung aber auch die Rechnung Zeile für Zeile vereinfachen. Das ist weniger übersichtlich und benötigt weniger Platz:

$$12*[(2+2)*(2+2)]=$$

$$12*[4*(2+2)]=$$

$$12*[4*4]=$$

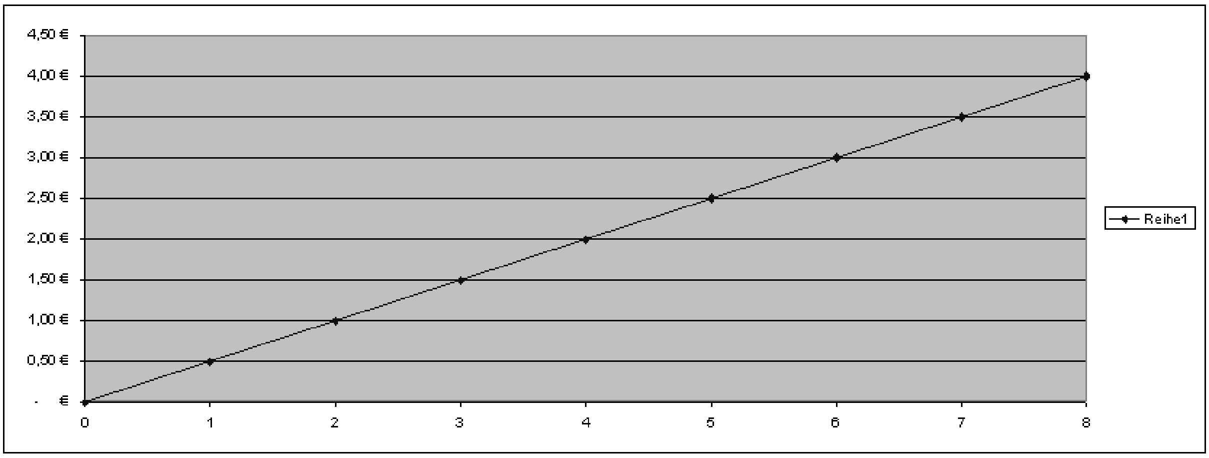
$$12*16=192$$

Dreisatz

proportionaler Dreisatz

Eine Kugel Eis kostet 0,50 € und zwei Kugeln Eis kosten 1,00 €. Einen solchen Zusammenhang nennt man linear oder proportional. Je mehr Kugeln Eis du kaufst um so mehr Euro musst Du bezahlen. Je weniger Kugeln Eis Du kaufst um so weniger Euro musst Du zahlen. Das kannst Du Dir in einer Wertetabelle und in einer Grafik veranschaulichen.

Kugel	0	1	2	3	4	5	6	7	8
€	- €	0,50 €	1,00 €	1,50 €	2,00 €	2,50 €	3,00 €	3,50 €	4,00 €



Wenn 3 Kugeln Ei also 1,50 € kosten. Dann berechnest Du, wie viel Euro eine Kugel kostet, indem Du den Preis durch die Anzahl der Kugeln dividierst. Nun kennst Du den Preis für eine Kugel und musst diesen Preis nur noch mit der Anzahl der bestellten Kugeln multiplizieren:

3 Kugeln kosten 1,50 €

1 Kugel kostet 1,50 € : 3 = 0,50 €

$$\frac{1{,}50€}{3} = 0{,}50€$$

1,	5	:	3	=	0,	5	0
0							
1	5						
1	5						
0	0						

2 Kugeln kosten 1,50€ : 3 * 2

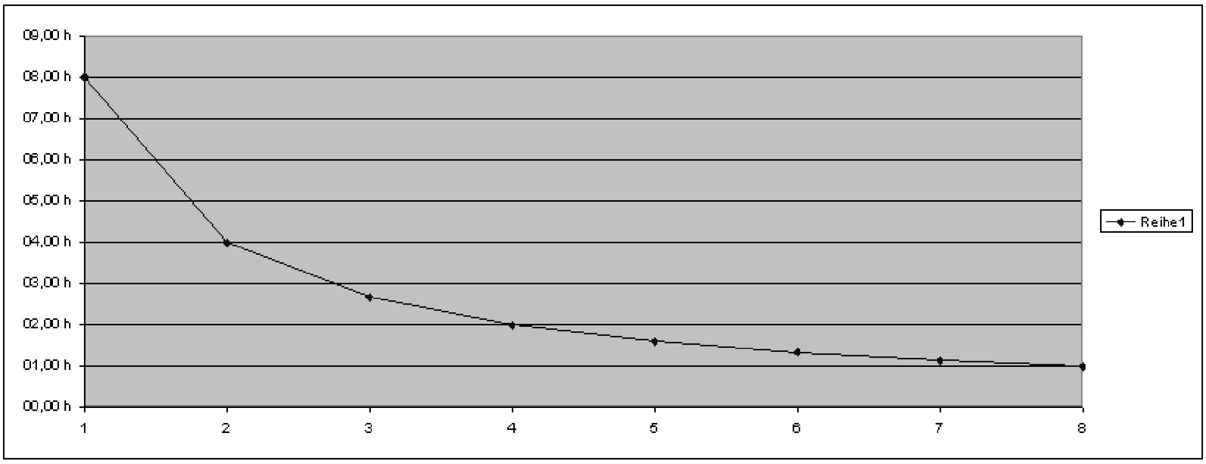
$$\frac{1{,}50€}{3} * 2 = 1{,}00€$$

0,	5	0	*	2
		0,	0	0
		1		
		1,	0	0

Antiproportionaler Dreisatz

Angenommen ein Mitarbeiter benötigt für das Anstreichen einer Wand 8 Stunden. Wenn dieser Mitarbeiter Hilfe durch einen weiteren Kollegen bekommt, so können sie sich die Arbeit teilen. Nun benötigen beide zusammen nur noch 4 Stunden, um die Wand anzustreichen. Einen solchen Zusammenhang ist nicht linear. In diesem Beispiel ist der Zusammenhang antiproportional. Das ist immer dann der Fall, wenn bei steigenden Werten der einen Größe die Werte der anderen Größe sinken. Das kannst Du dir gut in einer Grafik anschauen:

Mitarbeiter	1	2	3	4	5	6	7	8
Stunden	08,00 h	04,00 h	02,67 h	02,00 h	01,60 h	01,33 h	01,14 h	01,00 h



4 Mitarbeiter benötigen 2 Stunden Arbeit

1 Mitarbeiter benötigt 4 * 2 Stunden = 8 Stunden Arbeit

3 Mitarbeiter benötigen 4 * 2 Stunden durch 3

$$\frac{4*2}{3} = 2,67$$

Maßeinheiten umrechnen

Messen, Wiegen und Zählen ist eine sehr häufige Tätigkeit im Alltag. Dabei werden Zahlen nach unterschiedlichen Einheiten verschiedenen physikalischen Größen zugeordnet. Das hört sich komplizierter an, als es ist. Dass Du damit vertraut bist, zeigt Dir die folgende Tabelle:

				Raum		Länge		Fläche		Masse	
			Vorsilbe	Liter		Meter		Quadratmeter		Gramm	
Tausendstel	0,001	10^{-3}	milli	1000	ml	1000	mm			1000	mg
Hundertstel	0,01	10^{-2}	centi	100	cl	100	cm				
Zehntel	0,1	10^{-1}	deci	10	dl	10	dm				
Einer	1	10^{1}		1	l	1	m	10000	m²	1	g
Zehner	10	10^{2}	deka					100	a		
Hunderter	100	10^{3}	hekto	0,01	hl			1	ha		
Tausender	1000	10^{4}	kilo			0,001	km			0,001	kg

Wenn Du also 500g Mehl und noch einmal 1kg Mehl im Schrank stehen hast, dann hast Du zusammen 1500g Mehl oder 1,5kg Mehl im Schrank stehen. Du rechnest also zuerst entweder in Gramm oder in Kilogramm um und addierst dann die Beträge. Kilogramm rechnest Du in Gramm um, indem Du den Betrag mit 1000 multiplizierst und Gramm rechnest Du in Kilogramm um, indem Du durch 1000 dividierst:

$$500g + 1kg = \frac{500}{1000}kg + 1kg = 0{,}5kg + 1kg = 1{,}5kg$$

$$500g + 1kg = 500g + 1*1000g = 500g + 1000g = 1500g$$

$$1500g = 1{,}5kg$$

Prozentrechnung

Stell Dir weiße Kugekn und schwarze Würfel vor. Und stell Dir Schachteln vor, in denen die Kugeln und Schachteln aufbewahrt werden. In allen abgebildeten Schachteln befinden sich immer je zur einen Hälfte helle Kugeln und zur anderen Hälfte dunkelfarbige Würfel.

○	■	○	■	○	■	○	■	○	■	○	■	○	■
		○	■	○	■	○	■	○	■	○	■	○	■
				○	■	○	■	○	■	○	■	○	■
						○	■	○	■	○	■	○	■
								○	■	○	■	○	■
										○	■	○	■
												○	■

Das Verhältnis von Kugeln und Würfeln zur Gesamtzahl der Gegenstände ist immer ein Halbes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100}$$

Es sind immer jeweils 50 von 100 Würfel oder Kugeln in der Schachtel. 50 von 100 ist gleich $\frac{50}{100}$ und das ist gleich **50%.**

Eine Mischung enthält zwei Bestandteile A und B. Der Bestandteil A ist in der Mischung immer zu 25% enthalten:

Mischung	1000,00 g	500,00 g	250,00 g	100%	G Grundwert
Bestandteil A	250,00 g	125,00 g	62,50 g	25%	P Prozentwert
Bestandteil B	750,00 g	375,00 g	187,50 g	75%	P Prozentwert

Das Verhältnis zwischen Prozentwert und Grundwert ist gleich dem Verhältnis zwischen Prozentsatz und 100:

$$\frac{250}{1000} = \frac{125}{500} = \frac{62,5}{250} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$$

Es gilt:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100} \qquad \frac{\mathrm{Pr}\,ozentwert}{Grundwert} = \frac{\mathrm{Pr}\,ozentsatz}{100}$$

Aus dieser Gleichung können wir jetzt die wichtigen Gleichungen zur Prozentrechnung ableiten:

Den Prozentwert berechnen Wir mit der Formel:

$$\Pr ozentwert = \frac{\Pr ozentsatz}{100} * Grundwert$$

Jetzt schauen wir uns an, warum das so ist. Wir wissen ja schon, dass das Verhältnis von Prozentwert zu Grundwert gleich dem Verhältnis von Prozentsatz zu 100 ist:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100}$$

Jetzt multiplizieren wir beide Seiten mit G. Eine Gleichung bleibt wahr, wenn wir beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren:

$$\frac{P}{G} * G = \frac{p}{100} * G$$

Jetzt kürzen wir auf der linken Seite mit G:

$$P = \frac{p}{100} * G$$

Den Prozentsatz berechnen wir mit der Formel:

$$\Pr ozentsatz = \frac{\Pr ozentwert}{Grundwert} * 100$$

Jetzt schauen wir uns an, warum das so ist. Wir wissen ja schon, dass das Verhältnis von Prozentwert zu Grundwert gleich dem Verhältnis von Prozentsatz zu 100 ist:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100}$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit 100. Eine Gleichung bleibt wahr, wenn wir beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren:

$$\frac{P}{G} * 100 = \frac{p}{100} * 100$$

Nun kürzen wir auf der rechten Seite 100:

$$\frac{P}{G} * 100 = p$$

Das aber ist gleich:

$$p = \frac{P}{G} * 100$$

Den Grundwert berechnen wir mit der Formel:

$$Grundwert = \mathrm{Pr}\,ozentwert * \frac{100}{\mathrm{Pr}\,ozentsatz}$$

Jetzt schauen wir uns an, warum das so ist. Wir wissen ja schon, dass das Verhältnis von Prozentwert zu Grundwert gleich dem Verhältnis von Prozentsatz zu 100 ist:

$$\frac{P}{G} = \frac{p}{100}$$

Jetzt multiplizieren wir beide Seiten mit G. Eine Gleichung bleibt wahr, wenn wir beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren:

$$\frac{P}{G} * G = \frac{p}{100} * G$$

Wir kürzen jetzt auf der linken Seite G:

$$P = \frac{p}{100} * G$$

Wir multiplizieren jetzt beide Seiten mit $\frac{100}{p}$:

$$P * \frac{100}{p} = \frac{p}{100} * \frac{100}{p} * G$$

Auf der rechten seite kürzen wir jetzt 100 und p:

$$P * \frac{100}{p} = G$$

Das ist gleich:

$$G = P * \frac{100}{p}$$

3993